2026 年 2 月 7 日数栋数学疯人院阶段性统练·罚题专场

考试时间：70 分钟

一、填空题（共 8 题，每题 15 分，共 120 分）

1. 已知函数 $f\left(x\right)=\left(x-m\right)2^{x}+2x+2m-4$ 有 3 个零点 a,b,c，且 $a<b<c$，则 $4a^{2}+2b^{2}+c^{2}$ 的最小值为__________.

2. 已知数列 $\{a_n\}$ 是单调递增的无穷数列，$\{b_n\}$ 是单调递减的无穷数列．有以下四个结论

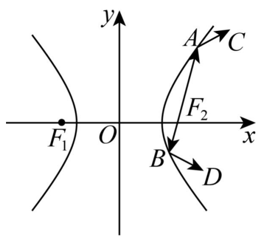
①存在数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$，使得 $a_n+a_{n+1}=b_n+b_{n+1}$ 恒成立；②存在数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$，使得 $a_na_{n+1}=b_nb_{n+1}$ 恒成立；③对于任意无穷等差数列 $\{c_n\}$，总存在 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 使得 $c_n=a_n+b_n$；

④对于任意无穷等比数列 $\{c_n\}$，总存在 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 使得 $c_n=a_nb_n$.

则所有正确结论的序号是__________．（少选或多选都是零分）

3. 已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\left(a>b>0\right)$ 的离心率 $e=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，左，右焦点分别为 F_1,F_2，点 P 在椭圆上，且 $PF_2\perp x$ 轴，I 为 $\triangle PF_1F_2$ 的内心，若 $\overrightarrow{IP}\cdot\overrightarrow{F_1F_2}=2\sqrt{3}$，则 $b^2=$___________.

4. 如图所示，双曲线 $E:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1\left(a>0,b>0\right)$ 的左、右焦点分别为 F_1,F_2，从 F_2 发出的光线经过图中的 A,B 两点反射后，反射光线分别是 AC,BD，且 $\cos\angle BAC=-\dfrac{3}{5}$，$AB\perp BD$，$A,F_2,B$ 三点共线，则 E 的离心率为______.



5. 已知正四面体 $P-ABC$ 的棱长为 1，正四面体 $Q-MNG$ 在正四面体 $P-ABC$ 的内部，且可以任意转动，则正四面体 $Q-MNG$ 的体积最大值为______.

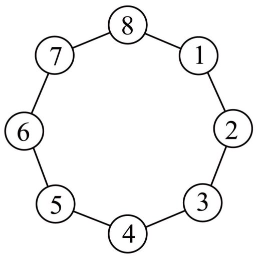
6. 已知抛物线$\Gamma: y^2=4x$的焦点为F，M,N为Γ上两点，O为坐标原点.若M在以ON为直径的圆上，则$|FM|+|FN|$的最小值为________.

7. 若函数$y=-x^2+m$的图像与$y=\left|x^2+x\right|+\sqrt{x^4-3x^2+2x+5}$的图像有公共点，则实数$m$的取值范围是______.

8. 对任意$x\in\left(\frac{\pi}{6},\frac{3\pi}{4}\right]$，$a$为正实数，式子$\left|2a\sin x-b\right|\le -2b\cos 2x+2b+a$恒成立，则实数$\frac{b}{a}$的最小值为_________.

二、解答题（共2题，每题15分，共30分）

9. （15分）如图，数字1至8按顺时针方向排成一圈，将一棋子放在数字8处，按如下规则移动棋子：抛掷一枚质地均匀的硬币1次，若正面朝上，棋子按顺时针方向连续移动3个相邻位置；若反面朝上，则按逆时针方向连续移动3个相邻位置．若连续投掷硬币n次，并按上述规则移动棋子，记最终棋子所处的数字为随机变量X_n.（例如：若连续3次抛掷硬币均为正面朝上，则棋子移动3次，第1次从数字8处移动到数字3处，第2次移动到数字6处，第3次移动到数字1处，即$X_3=1$.）现设计一项游戏：游戏包含若干轮，每轮开始时将棋子放在数字8处，玩家连续投掷6次硬币并按上述规则移动棋子，当$X_6<4$时玩家获胜，游戏结束，否则进行下一轮，游戏最多进行10轮．记游戏结束时的轮数为随机变量Y，求Y的分布列，并证明$E\left(Y\right)<4$.



10. （15分）已知抛物线$C_1: y^2=8x$与椭圆$C_2:\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{32}=1$在第一象限和第四象限内的交点分别为$P\left(x_0,y_0\right)$和$Q,O$为原点,记由曲线$y^2=8x\left(x\le x_0\right)$与$\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{32}=1\left(x\ge x_0\right)$构成的曲线为$C_3$.易知$F$为$\triangle OPQ$的重心，已知在曲线$C_3$上还存在异于$O,P,Q$的点$M_1\left(x_1,y_1\right)$、$M_2\left(x_2,y_2\right),M_3\left(x_3,y_3\right)$，使得$\triangle M_1M_2M_3$的重心也为$F$.

证明：M_1,M_2，M_3中，有且只有两点在抛物线上，且这两点在同一象限内。