2025～2026 学年第一学期高三年级期末学业诊断

数学试题参考答案及评分建议

一．单项选择题： C　D　A　B　C　B　C　D

二．多项选择题： 9. BCD　　10. BC　　11. ABD

三．填空题： 12. $(-2,0),(2,0)$　　13. $(100+16\sqrt{3})\pi$　　14. $(\frac{1}{e},+\infty)$

四．解答题： 15. 解：（1）$\because \cos B=-\frac{1}{3}$，$0<B<\pi$，$\therefore \sin B=\frac{2\sqrt{2}}{3}$，　………1 分

由 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$ 得 $a\sin B=b\sin A=2\sqrt{2}$，$\therefore a=3$.　………4 分

（2）由（1）得 $a=3$，$b=2\sqrt{3}$，$\therefore \cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\frac{9+c^2-12}{6c}=-\frac{1}{3}$，　……6 分

$\therefore c=1$ 或 $c=-3$（舍去），$\therefore \triangle ABC$ 的面积 $S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}bc\sin A=\sqrt{2}$.　………8 分

（3）设 $\sin\angle ABD=\alpha$，则 $\cos B=\cos 2\alpha=1-2\sin^2\alpha=-\frac{1}{3}$，$\therefore \sin\alpha=\frac{\sqrt{6}}{3}$，　……10 分

$\because S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}AB\cdot BD\sin\alpha+\frac{1}{2}BC\cdot BD\sin\alpha=2BD\sin\alpha=\frac{2\sqrt{6}}{3}BD=\sqrt{2}$，$\therefore BD=\frac{\sqrt{3}}{2}$.　……13 分

16. 解（1）记“用户输入一个问题没有语法错误”为事件 A，“用户输入一个问题软件生成正确答案”为事件 B，由题意可得 $P(A)=0.9$，$P(\overline{A})=0.1$，$P(B|A)=0.85$，$P(B|\overline{A})=0.35$，

$\therefore P(B)=P(A)(B|A)+P(\overline{A})P(B|\overline{A})=0.9\times0.85+0.1\times0.35=0.8$.　………6 分

（2）由（1）知用户输入一个问题软件生成正确答案的概率为 0.8，

则 $X\sim B(n,0.8)$，$\therefore P(X=8)=C_n^8 0.8^8\times0.2^{n-8}$，　………9 分

令 $a_n=C_n^8 0.8^8\times0.2^{n-8}$，则 $\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{C_{n+1}^8\times0.8^8\times0.2^{n-7}}{C_n^8\times0.8^8\times0.2^{n-8}}=\frac{n+1}{5(n-7)}$，　………11 分

令 $\frac{n+1}{5(n-7)}>1$，则 $n<9$；令 $\frac{n+1}{5(n-7)}<1$，则 $n>9$；令 $\frac{n+1}{5(n-7)}=1$，则 $n=9$；

当 $n=9$ 或 $n=10$ 时，$P(X=8)$ 取最大值.　………15 分

17.（1）证明：$\because$ 底面 $ABCD$ 为平行四边形，$\angle BAD=120^\circ$，$\therefore \angle CDE=60^\circ$，

在 $\triangle CDE$ 中，$\because CD=1$，$DE=\frac{1}{2}AD=2$，

$\therefore CE^2=CD^2+DE^2-2CD\cdot DE\cdot\cos\angle CDE=5-4\cos60^\circ=3$，$\therefore CE=\sqrt{3}$，　………2 分

$\therefore DE^2=CD^2+CE^2$，$\therefore \angle DCE=90^\circ$，即 $CD\perp CE$，　………3 分

$\because PC\perp CD$，$PC\cap CE=C$，$\therefore CD\perp$ 平面 PCE，$\therefore CD\perp PE$，　………5 分

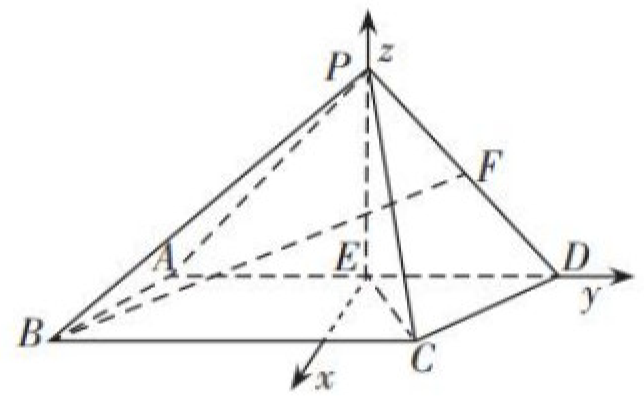
$\because$ 四边形 $ABCD$ 为平行四边形，$\therefore AB\parallel CD$，$\therefore AB\perp PE$.　………6 分

（2）由（1）得 $PE\perp CD$，$\because PE\perp EC$，$CD\cap CE=C$，$\therefore PE\perp$ 平面 CDE，$\therefore PE\perp AE$，

$\because PA=2\sqrt{3}$，$\therefore PE=\sqrt{PA^2-AE^2}=2\sqrt{2}$，　………7 分

以 E 为坐标原点，ED,EP 所在直线分别为 y 轴、z 轴，建立如图所示的空间直角坐标系，

则 $B(\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{5}{2},0)$，$C(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{3}{2},0)$，$D(0,2,0)$，$P(0,0,2\sqrt{2})$，



假设存在点 F，设 $\overrightarrow{DF}=\lambda\overrightarrow{DP}(0<\lambda<1)$，

$\therefore\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DF}=\overrightarrow{BD}+\lambda\overrightarrow{DF}=(-\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{9}{2}-2\lambda,2\sqrt{2}\lambda)$，　……9 分

设 $\vec{m}=(x_1,y_1,z_1)$ 是平面 PBC 的一个法向量，则 $\begin{cases}\vec{m}\perp\overrightarrow{BC},\\ \vec{m}\perp\overrightarrow{BP},\end{cases}$ $\therefore\begin{cases}4y_1=0,\\ -\frac{\sqrt{3}}{2}x_1+\frac{5}{2}y_1+2\sqrt{2}z_1=0,\end{cases}$

令 $x_1=4\sqrt{2}$，则 $y_1=0,z_1=\sqrt{3}$，$\therefore\vec{m}=(4\sqrt{2},0,\sqrt{3})$，　………11 分

设直线 BF 与平面 PBC 所成角为 θ，

则 $\sin\theta=|\cos<\vec{m},\overrightarrow{BF}>|=\frac{|\vec{m}\cdot\overrightarrow{BF}|}{|\vec{m}||\overrightarrow{BF}|}=\frac{|2\sqrt{6}(\lambda-1)|}{\sqrt{35}\cdot\sqrt{\frac{3}{4}+(\frac{9}{2}-2\lambda)^2+8\lambda^2}}=\frac{\sqrt{14}}{35}$，　………13 分

$\therefore\lambda=\frac{1}{2}$ 或 $\lambda=\frac{13}{8}$（舍去），　$\therefore DF=\frac{1}{2}DP$，即点 F 是 PD 的中点.　………15 分

18. 解：（1）由题意可设抛物线 C 的标准方程为 $x^2=2py(p>0)$，

$\because|AB|=8$，$\therefore$ 抛物线 C 经过点 $(4,4)$，$\therefore4^2=8p$，$\therefore p=2$，

$\therefore$ 抛物线 C 的标准方程为 $x^2=4y$.　………3 分

（2）设 $P(x,y)$，由（1）得 $F(0,1)$，则 $\sqrt{x^2+(y-1)^2}=5\sqrt{x^2+(y+\frac{19}{5})^2}$，　………5 分

化简得 $x^2+y^2+8y+15=0$，即 $x^2+(y+4)^2=1$.　………7 分

（3）设 $P(x_0,y_0)$，$M(x_1,y_1),N(x_2,y_2)$，由 $x^2=4y$ 得 $y=\frac{1}{4}x^2$，$y'=\frac{1}{2}x$，

$\therefore$ 抛物线 C 在点 $M(x_1,y_1)$ 处的切线方程为 $y-y_1=\frac{1}{2}x_1(x-x_1)$，即 $x_1x-2y-2y_1=0$，

$\because$ 点 P 在该切线上，$\therefore x_1x_0-2y_0-2y_1=0$，

同理可得 $x_2x_0-2y_0-2y_2=0$，$\therefore$ 直线 MN 的方程为 $x_0x-2y-2y_0=0$，　………9 分

由 $\begin{cases}x^2=4y,\\ x_0x-2y-2y_0=0\end{cases}$ 得 $x^2-2x_0x+4y_0=0$，$\therefore x_1+x_2=2x_0$，$x_1x_2=4y_0$，　………11 分

$\therefore|MN|=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}=\sqrt{(x_1-x_2)^2+\frac{1}{16}(x_1{}^2-x_2{}^2)^2}=\frac{1}{4}\sqrt{(x_1-x_2)^2[16+(x_1+x_2)^2]}$

$=\sqrt{(x_0{}^2-4y_0)(x_0{}^2+4)}$，$\because$ 点 P 到直线 MN 的距离 $d=\frac{|x_0{}^2-4y_0|}{\sqrt{x_0{}^2+4}}$，

$\therefore \triangle PMN$ 面积 $S=\frac{1}{2}|MN|\cdot d=\frac{1}{2}|x_0{}^2-4y_0|^{\frac{3}{2}}$， ………14 分

$\because x_0{}^2+y_0{}^2+8y_0+15=0$，$\therefore x_0{}^2=-(y_0{}^2+8y_0+15)$，$-5\le y_0\le -3$，

$\therefore \triangle PMN$ 面积 $S=\frac{1}{2}|MN|\cdot d=\frac{1}{2}|(y_0+6)^2-21|^{\frac{3}{2}}$， ………16 分

当 $y_0=-5$ 时，$\triangle PMN$ 面积 S 取得最大值 $20\sqrt{5}$. ………17 分

19. 解（1）当 $a=1$ 时，则 $f(x)=e^x-x^2$，$\therefore f'(x)=e^x-2x$，$\therefore f(1)=e-1, f'(1)=e-2$，

$\therefore f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程为 $y-f(1)=f'(1)(x-1)$，即 $y=(e-2)x+1$. ………3 分

（2）令 $f(x)=ae^x-x^2=0$，则 $a=\frac{x^2}{e^x}$，$x\in\mathrm{R}$，令 $g(x)=\frac{x^2}{e^x}$，$x\in\mathrm{R}$，则 $g'(x)=\frac{x(2-x)}{e^x}$，

令 $g'(x)<0$，则 $x<0$ 或 $x>2$；令 $g'(x)>0$，则 $0<x<2$；

$\therefore g(x)$ 的递增区间为 $(0,2)$，递减区间为 $(-\infty,0)$ 和 $(2,+\infty)$； ………6 分

$\therefore g(0)=0$ 是 $g(x)$ 的极小值，$g(2)=\frac{4}{e^2}$ 是 $g(x)$ 的极大值，

当 $x\to-\infty$ 时，$g(x)=\frac{x^2}{e^x}\to+\infty$；当 $x\to+\infty$ 时，$g(x)=\frac{x^2}{e^x}\to 0$，

当 $a<0$ 时，函数 $f(x)$ 无零点；当 $a=0$ 或 $a>\frac{4}{e^2}$ 时，函数 $f(x)$ 有1个零点；

当 $a=\frac{4}{e^2}$ 时，函数 $f(x)$ 有2个零点；当 $0<a<\frac{4}{e^2}$ 时，函数 $f(x)$ 有3个零点. ………10 分

（3）由题意得 $f(x_1)=f(x_2)=0$，$\therefore a=\frac{x_1{}^2}{e^{x_1}}=\frac{x_2{}^2}{e^{x_2}}$，$\therefore g(x_1)=g(x_2)=a$， ………11 分

$\therefore x_1,x_2$ 是方程 $g(x)=a$ 的两个正实数根，由（2）可知 $0<a<\frac{4}{e^2}$，$g(x)$ 在 $(0,2)$ 上递增，

在 $(2,+\infty)$ 递减，且 $0<x_1<2<x_2$，要证 $x_1x_2<4$，需证 $x_1<\frac{4}{x_2}$，只需证 $g(x_1)<g(\frac{4}{x_2})$，

$\because g(x_1)=g(x_2)$，只需证 $g(x_2)<g(\frac{4}{x_2})$，即需证 $\frac{x_2{}^2}{e^{x_2}}<\frac{16}{x_2{}^2e^{\frac{4}{x_2}}}$，

两边取对数，整理得 $x_2-\frac{4}{x_2}-4\ln x_2+4\ln 2>0$， ………14 分

令 $h(x)=x-\frac{4}{x}-4\ln x+4\ln 2$，$x>2$，则 $h'(x)=1+\frac{4}{x^2}-\frac{4}{x}=\frac{(x-2)^2}{x^2}>0$，

$\therefore h(x)$ 在 $(2,+\infty)$ 上单调递增，$\therefore h(x)>h(2)=0$，

$\therefore x_2-\frac{4}{x_2}-4\ln x_2+4\ln 2>0$ 成立，$\therefore x_1x_2<4$. ………17 分

注：以上各题其它解法请酌情赋分.