



2025~2026 学年第一学期高二年级期末学业诊断数学试题（样卷）

参考答案及评分建议

一. 单项选择题: B A D C A C C A

二. 多项选择题: 9. BD 10. ACD 11. BCD

三. 填空题: 12. $y = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}x$ 13. 3 14. $\sqrt{26} - 3$

四. 解答题: 15. 解: (1) 由题意可设抛物线 C 的标准方程为 $x^2 = 2py (p > 0)$,

$\because C$ 的焦点坐标为 $(0,1)$, $\therefore \frac{p}{2} = 1$, $\therefore p = 2$,

$\therefore$ 抛物线 C 的标准方程为 $x^2 = 4y$, 其准线方程为 $y = -1$5 分

(2) 当双曲线 C 的焦点在 x 轴上时, 设其标准方程为 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$,

由 $\begin{cases} 2a = 2, \\ \frac{4}{a^2} - \frac{3}{b^2} = 1 \end{cases}$ 得 $\begin{cases} a = 1, \\ b = 1, \end{cases} \therefore x^2 - y^2 = 1$, 焦点坐标为 $F(\pm\sqrt{2}, 0)$9 分

当双曲线 C 的焦点在 y 轴上时, 设其标准方程为 $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$,

因 $\begin{cases} 2a = 2, \\ \frac{3}{a^2} - \frac{4}{b^2} = 1 \end{cases}$ 得 $\begin{cases} a = 1, \\ b = \sqrt{2}, \end{cases} \therefore y^2 - \frac{x^2}{2} = 1$, 焦点坐标为 $F(0, \pm\sqrt{3})$ 13 分

16. 解: (1) 由题意可设抛物线 $C: y^2 = 2px (p > 0)$,2 分

$\because$ 直线 $x + y - 2 = 0$ 与 x 轴的交点为 $(2, 0)$, $\therefore F(2, 0)$, $\therefore \frac{p}{2} = 2$, $\therefore p = 4$,

$\therefore$ 抛物线 C 的标准方程为 $y^2 = 8x$6 分

(2) 设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, 直线的 l 方程为 $x = my + 2$,8 分

由 $\begin{cases} y^2 = 8x, \\ x = my + 2 \end{cases}$ 得 $y^2 - 8my - 16 = 0$, $\therefore y_1 + y_2 = 8m$,10 分

$\therefore |AB| = |AF| + |BF| = x_1 + 2 + x_2 + 2 = m(y_1 + y_2) + 8 = 8m^2 + 8 = 16$, $\therefore m = \pm 1$,14 分

$\therefore$ 直线的 l 方程为 $x = \pm y + 2$, 即 $x \pm y - 2 = 0$15 分

17. 解: (1) 设 $P(x, y)$, 由题意得直线 PA 斜率为 $k_{PA} = \frac{y}{x+1} (x \neq -1)$,2 分

直线 PB 斜率为 $k_{PB} = \frac{y}{x-1} (x \neq 1)$, $\therefore \frac{y}{x+1} \cdot \frac{y}{x-1} = 3$,5 分

化简, 得曲线 C 的标准方程 $x^2 - \frac{y^2}{3} = 1 (x \neq \pm 1)$6 分

(2) 设 $M(x_1, y_1), N(x_2, y_2)$, 由 $\begin{cases} y = kx + m, \\ x^2 - \frac{y^2}{3} = 1 \end{cases}$ 得 $(3 - k^2)x^2 - 2kmx - (m^2 + 3) = 0$,8 分

$$\therefore x_1 + x_2 = \frac{2km}{3-k^2} = 2, \text{ 且 } 3-k^2 \neq 0, \therefore km = 3-k^2, \therefore n = k+m, \therefore k = \frac{3}{n}, m = n - \frac{3}{n}, \dots\dots 12 \text{ 分}$$

$$\therefore \Delta = 4k^2m^2 + 4(3-k^2)(m^2+3) > 0, \therefore m^2+3 > k^2, \therefore \left(n - \frac{3}{n}\right)^2 + 3 > \frac{9}{n^2}, \therefore n < -\sqrt{3} \text{ 或 } n > \sqrt{3},$$

$$\therefore \text{实数 } n \text{ 的取值范围为 } (-\infty, -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}, +\infty). \dots\dots 15 \text{ 分}$$

$$18. \text{解: (1) 由题意双曲线 } C \text{ 的渐近线方程为 } y = \pm \frac{b}{a}x, \text{ 即 } \pm bx - ay = 0, \dots\dots 1 \text{ 分}$$

$$\text{由 } \begin{cases} e = \frac{c}{a} = \sqrt{2}, \\ \frac{bc}{\sqrt{a^2+b^2}} = 1, \\ c^2 = a^2 + b^2 \end{cases} \text{ 得 } a = b = 1, \therefore \text{双曲线 } C \text{ 的方程为 } x^2 - y^2 = 1. \dots\dots 5 \text{ 分}$$

$$(2) \text{ 设 } A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), \text{ 由 } \begin{cases} y = kx + 1, \\ x^2 - y^2 = 1 \end{cases} \text{ 得 } (1-k^2)x^2 - 2kx - 2 = 0, \dots\dots 7 \text{ 分}$$

$$\therefore \begin{cases} 1-k^2 \neq 0, \\ \Delta = 4k^2 + 8(1-k^2) > 0, \\ x_1x_2 = -\frac{2}{1-k^2} < 0, \end{cases} \therefore -1 < k < 1, \therefore \text{实数 } k \text{ 的取值范围为 } (-1, 1). \dots\dots 11 \text{ 分}$$

$$(3) \text{ 由 (1) 得 } x_1 + x_2 = \frac{2k}{1-k^2}, x_1x_2 = \frac{-2}{1-k^2}, \dots\dots 13 \text{ 分}$$

$$\therefore |AB| = \sqrt{1+k^2} |x_1 - x_2| = \sqrt{1+k^2} \sqrt{(x_1+x_2)^2 - 4x_1x_2} = \frac{2\sqrt{1+k^2}\sqrt{2-k^2}}{1-k^2}, \dots\dots 14 \text{ 分}$$

$$\therefore \text{点 } O \text{ 到直线 } AB \text{ 的距离 } d = \frac{1}{\sqrt{1+k^2}}, \therefore \triangle AOB \text{ 的面积 } S = \frac{1}{2} |AB| \cdot d = \frac{\sqrt{2-k^2}}{1-k^2} = \sqrt{6},$$

$$\therefore k = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ 或 } k = \pm \frac{2\sqrt{3}}{3} \text{ (舍去)}. \dots\dots 17 \text{ 分}$$

$$19. \text{解: (1) 由题意可得点 } A(-2, 1), B(2, 1), \therefore (-2)^2 = 2p, \therefore p = 2, \dots\dots 3 \text{ 分}$$

$$\therefore \text{抛物线 } C \text{ 的方程为 } x^2 = 4y. \dots\dots 4 \text{ 分}$$

$$(2) \text{ 由 (1) 得 } C: x^2 = 4y, \therefore F(0, 1), \text{ 设 } M(x_1, y_1), N(x_2, y_2) (x_1 < 0 < x_2),$$

$$\text{① 直线 } l \text{ 的方程为 } y = x + 1, \text{ 由 } \begin{cases} y = x + 1, \\ x^2 = 4y \end{cases} \text{ 得 } x^2 - 4x - 4 = 0, \dots\dots 6 \text{ 分}$$

$$\therefore x_1 = 2 - 2\sqrt{2}, x_2 = 2 + 2\sqrt{2}, \dots\dots 8 \text{ 分}$$

$$\therefore \frac{|MF|}{|NF|} = \frac{y_1 + 1}{y_2 + 1} = \frac{x_1 + 2}{x_2 + 2} = 3 - 2\sqrt{2}. \dots\dots 10 \text{ 分}$$

$$\text{② 由题意可设直线 } l \text{ 的方程为 } y = kx + 1,$$

由 $\begin{cases} y=kx+1, \\ x^2=4y \end{cases}$ 得 $x^2-4kx-4=0$, $\therefore x_1+x_2=4k, x_1x_2=-4$,13 分

$\therefore$ 直线 AM 的方程为 $y-1=\frac{y_1-1}{x_1+2}(x+2)=\frac{kx_1}{x_1+2}(x+2)$, 即 $\frac{x+2}{y-1}=\frac{x_1+2}{kx_1}$, ①

直线 BN 的方程为 $y-1=\frac{y_2-1}{x_2-2}(x-2)=\frac{kx_2}{x_2-2}(x-2)$, 即 $\frac{x-2}{y-1}=\frac{x_2-2}{kx_2}$, ②15 分

①-②得 $\frac{4}{y-1}=\frac{x_1+2}{kx_1}-\frac{x_2-2}{kx_2}=\frac{2(x_1+x_2)}{kx_1x_2}=-2$, $\therefore y=-1$,

$\therefore$ 点 G 的在定直线 $y=-1$ 上.17 分

注：以上各题其它解法请酌情赋分.

公众号：三重教育