

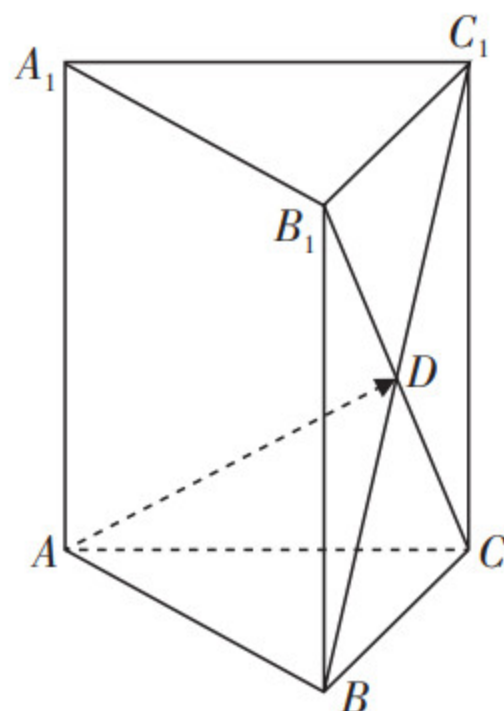


1. 【答案】B

【解析】因为直线 $x = \cos 75^\circ$ 垂直于 x 轴, 所以该直线的倾斜角为 90° . 故选: B.

2. 【答案】C

【解析】如下图所示:



易知 $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BB_1}) = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AA_1}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{a} + \frac{1}{2}\overrightarrow{b} + \frac{1}{2}\overrightarrow{c}$. 故选: C.

3. 【答案】C

【解析】由题意得 $f(x) = x - \ln x$, 定义域为 $(0, +\infty)$, $f'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}$, 令 $\begin{cases} \frac{x-1}{x} < 0 \\ x > 0 \end{cases}$, 解得 $0 < x < 1$, 故函数 $f(x)$ 的单调递减区间是 $(0, 1)$. 故选: C.

4. 【答案】C

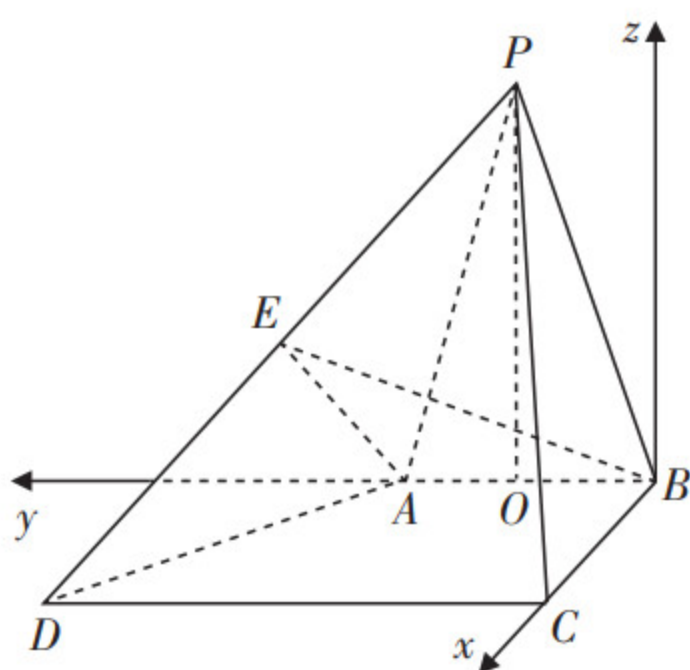
【解析】若方程 $\frac{x^2}{m-1} - \frac{y^2}{m+3} = 1$ 表示双曲线, 则 $(m-1)(m+3) > 0$, 解得 $m > 1$ 或 $m < -3$, 所以实数 m 的取值范围为 $(-\infty, -3) \cup (1, +\infty)$. 故选: C.

5. 【答案】C

【解析】当 $a \neq \pm 1$ 时, 直线 $ax + (a+1)y = 0$ 和直线 $2ax + (1-a)y + 1 = 0$ 平行, 即 $-\frac{a}{a+1} = \frac{2a}{a-1}$ 且 $\frac{0}{a+1} \neq \frac{1}{a-1}$, 解得 $a = 0$ 或 $a = -\frac{1}{3}$; 当 $a = 1$ 时, 直线 $ax + (a+1)y = 0$ 和直线 $2ax + (1-a)y + 1 = 0$ 不平行; 当 $a = -1$ 时, 直线 $ax + (a+1)y = 0$ 和直线 $2ax + (1-a)y + 1 = 0$ 不平行. 所以 “ $a = -\frac{1}{3}$ ” 是 “直线 $ax + (a+1)y = 0$ 和直线 $2ax + (1-a)y + 1 = 0$ 平行” 的充分不必要条件. 故选: C.

6. 【答案】A

【解析】由 $PA = PB$, 取 AB 的中点为 O , 连接 PO , 则 $PO \perp AB$, 因为平面 $PAB \perp$ 平面 $ABCD$, $PO \subset$ 平面 PAB , 平面 $PAB \cap$ 平面 $ABCD = AB$, 所以 $PO \perp$ 平面 $ABCD$, 又因为 $AB \perp BC$, 建立空间直角坐标系如图所示:



由 $PA = PB = 3, AB \parallel DC, DC = 2AB = 2BC = 4$, 则 $PO = \sqrt{9-1} = 2\sqrt{2}$,

可得: $A(0, 2, 0), D(2, 4, 0), P(0, 1, 2\sqrt{2})$, 又因为 E 为 PD 的中点, 所以 $E(1, \frac{5}{2}, \sqrt{2})$, 即 $\overrightarrow{BA} = (0, 2, 0), \overrightarrow{BE} = (1, \frac{5}{2}, \sqrt{2}), \overrightarrow{BD} = (2, 4, 0)$, 设平面 ABE 的一个法向量为 $\mathbf{n} = (x, y, z)$,

$$\text{则} \begin{cases} \overrightarrow{BA} \cdot \mathbf{n} = 2y = 0 \\ \overrightarrow{BE} \cdot \mathbf{n} = x + \frac{5}{2}y + \sqrt{2}z = 0 \end{cases}, \text{令 } z = 1, \text{ 则 } y = 0, x = -\sqrt{2}, \text{ 所以 } \mathbf{n} = (-\sqrt{2}, 0, 1),$$

$$\text{则点 } D \text{ 到平面 } ABE \text{ 的距离为 } d = \frac{|\mathbf{n} \cdot \overrightarrow{BD}|}{|\mathbf{n}|} = \frac{|(-\sqrt{2}, 0, 1) \cdot (2, 4, 0)|}{\sqrt{(-\sqrt{2})^2 + 0^2 + 1^2}} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{6}}{3}, \text{ 故选: A.}$$

7. 【答案】A

【解析】因为 $a_1 = \frac{2}{5}$ 且 $a_{n+1} = \begin{cases} 2a_n, & 0 \leq a_n < \frac{1}{2}, \\ 2a_n - 1, & \frac{1}{2} \leq a_n < 1. \end{cases}$ 所以 $a_2 = 2 \times a_1 = \frac{4}{5}, a_3 = 2 \times a_2 - 1 = 2 \times \frac{4}{5} - 1 = \frac{3}{5}, a_4 = 2 \times$

$a_3 - 1 = 2 \times \frac{3}{5} - 1 = \frac{1}{5}, a_5 = 2 \times a_4 = \frac{2}{5} = a_1, a_6 = 2 \times a_5 = \frac{4}{5} = a_2, \dots$, 所以数列 $\{a_n\}$ 是以 4 为周期的周期数列,

所以 $a_{2026} = a_{506 \times 4 + 2} = a_2 = \frac{4}{5}$. 故选: A.

8. 【答案】D

【解析】不等式 $e^{ax} - x + \sin 2ax \geq \frac{1}{e^{ax}} - \frac{1}{x} + \sin(\ln x^2)$ 可变形为 $e^{ax} - e^{-ax} + \sin 2ax \geq e^{\ln x} - e^{-\ln x} + \sin(\ln x^2)$, 即 $e^{ax} - e^{-ax} + \sin 2ax \geq e^{\ln x} - e^{-\ln x} + \sin(\ln x^2)$ 在 $(0, +\infty)$ 上恒成立, 令 $f(x) = e^x - e^{-x} + \sin 2x$, 易得 $f'(x) = e^x + e^{-x} + 2 \cos 2x \geq 2\sqrt{e^x \cdot e^{-x}} + 2 \cos 2x = 2 + 2 \cos 2x \geq 0$ 在 $\mathbf{R}$ 上恒成立, 所以函数 $f(x) = e^x - e^{-x} + \sin 2x$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增, 所以 $f(ax) \geq f(\ln x)$, 即 $ax \geq \ln x$, 故 $a \geq \frac{\ln x}{x}$ 在 $(0, +\infty)$ 上恒成立, 所以 $a \geq \left(\frac{\ln x}{x}\right)_{\max}$, 令 $g(x) = \frac{\ln x}{x}$, 则 $g'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$, 由 $g'(x) > 0$, 解得 $0 < x < e$; 由 $g'(x) < 0$, 解得 $x > e$; 所以 $g(x) = \frac{\ln x}{x}$ 在 $(0, e)$ 上单调递增, 在 $(e, +\infty)$ 上单调递减, 所以 $g(x)_{\max} = g(e) = \frac{1}{e}$, 即 $a \geq \left(\frac{\ln x}{x}\right)_{\max} = \frac{1}{e}$, 故实数 a 的取值范围是 $\left[\frac{1}{e}, +\infty\right)$. 故选: D.

9. 【答案】ABC

【解析】对于 A: $f'(x)$ 图象在 $x = -2$ 处左正右负、在 $x = 0$ 处左负右正、在 $x = 2$ 处左正右负, 所以函数 $f(x)$ 共有三个极值点, A 错误;

对于 B: 由极值点定义可知 $x = 2$ 是 $f(x)$ 的极大值点, B 错误;

对于 C: 由图象, 在 $(-1, 0)$ 上 $f'(x) < 0$, 在 $(0, 1)$ 上 $f'(x) > 0$, 所以 $f(x)$ 在 $(-1, 0)$ 单调递减, 在 $(0, 1)$ 单调递增, C 错误; 对于 D: 由图象, 在 $(-2, 0)$ 上 $f'(x) < 0$, 所以 $f(x)$ 在 $(-2, 0)$ 单调递减, D 正确. 故选: ABC.

10. 【答案】AC

【解析】 $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{A_1F} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AA_1} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AA_1}$, A 正确;

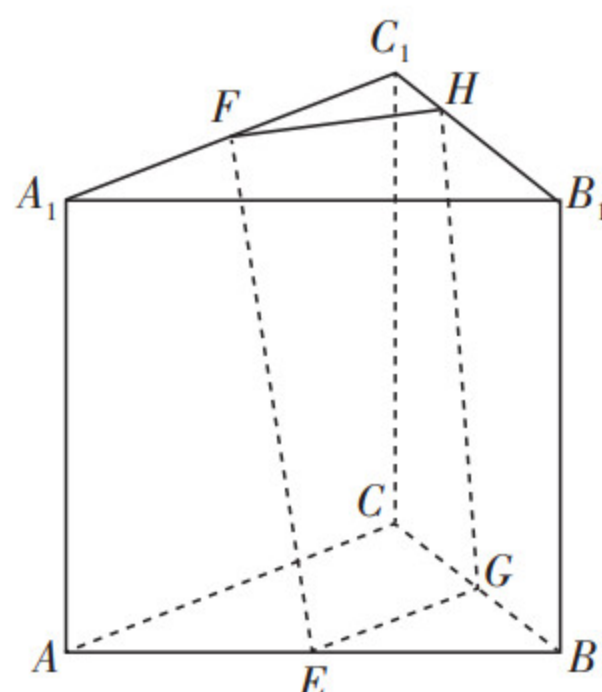
$\overrightarrow{EF} \cdot \overrightarrow{BC} = \left(-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AA_1}\right) \cdot \overrightarrow{BC} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AA_1} \cdot \overrightarrow{BC} = -\frac{1}{2} \times \left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + 0 = \frac{1}{2}$, B 错误;

过 E 作 $EG \perp BC$, 垂足为 G , 易知 $\overrightarrow{BG} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BC}$, 根据直三棱柱的性质可知 $BB_1 \perp EG$, 因为 $BC \cap BB_1 = B$, $BC, BB_1 \subset$ 平面 BCC_1B_1 , 所以 $EG \perp$ 平面 BCC_1B_1 , 过 F 作 $FH \perp B_1C_1$, 垂足为 H , 易知 $\overrightarrow{C_1H} = \frac{1}{4}\overrightarrow{C_1B_1}$, 同理可

得 $FH \perp$ 平面 BCC_1B_1 , 即 $\overrightarrow{EF}$ 在平面 BCC_1B_1 上的投影向量为 $\overrightarrow{GH}$, $|\overrightarrow{GH}| = \sqrt{1 + \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2}$, C 正确;

由 A 知, $\overrightarrow{EF} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AA_1}$, $\overrightarrow{A_1B_1} = \overrightarrow{AB}$, $|\overrightarrow{A_1B_1}| = 1$,

所以 $\overrightarrow{EF}$ 在 $\overrightarrow{A_1B_1}$ 上的投影向量为 $\frac{\overrightarrow{EF} \cdot \overrightarrow{A_1B_1}}{|\overrightarrow{A_1B_1}|^2} \overrightarrow{A_1B_1} = \left[\left(-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AA_1} \right) \cdot \overrightarrow{AB} \right] \overrightarrow{A_1B_1}$
 $= \left(-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}^2 + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AA_1} \cdot \overrightarrow{AB} \right) \overrightarrow{A_1B_1} = \left(-\frac{1}{2} \times 1 + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + 0 \right) \overrightarrow{A_1B_1} = -\frac{1}{4}\overrightarrow{A_1B_1}$, D 错误. 故选: AC



11. 【答案】ABC

【解析】由 $S_{2025} < 0$, 可得 $\frac{2025(a_1 + a_{2025})}{2} = 2025a_{1013} < 0$, 即 $a_{1013} < 0$, 又由 $S_{2026} > 0$, $\frac{2026(a_1 + a_{2026})}{2} = 1013(a_{1013} + a_{1014}) > 0$, 即 $a_{1013} + a_{1014} > 0$, $a_{1014} > 0$, 且 $|a_{1013}| < |a_{1014}|$, 则 $d = a_{1014} - a_{1013} > 0$, 所以 $a_1 < a_2 < \dots < a_{1013} < 0 < a_{1014}$, 所以 S_n 的最小值为 S_{1013} 无最大值. 故 A, B, C 均正确, D 错误. 故选: ABC.

12. 【答案】-1

【解析】由 $f'(x) = 3x^2 + 4ax + a^2$, 又函数 $f(x)$ 在 $x = 1$ 处取得极小值, 则 $f'(1) = 3 + 4a + a^2 = 0$, 解得 $a = -1$ 或 $a = -3$, 当 $a = -1$ 时, $f'(x) = 3x^2 - 4x + 1 = (3x - 1)(x - 1)$, 令 $f'(x) = 0$, 则 $x = \frac{1}{3}$, 或 $x = 1$, 当 $x \in \left(\frac{1}{3}, 1\right)$ 时, $f'(x) < 0$, 当 $x \in (1, +\infty)$ 时, $f'(x) > 0$, 则函数 $f(x)$ 在 $x = 1$ 处取得极小值, 故 $a = -1$ 符合题意; 当 $a = -3$ 时, $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x - 3)(x - 1)$, 令 $f'(x) = 0$, 则 $x = 3$ 或 $x = 1$, 当 $x \in (1, 3)$ 时, $f'(x) < 0$, 当 $x \in (-\infty, 1)$ 时, $f'(x) > 0$, 则函数 $f(x)$ 在 $x = 1$ 处取得极大值, 故 $a = -3$ 不符合题意. 故答案为: -1.

13. 【答案】 $(2\sqrt{15}, 8)$

【解析】联立 $\begin{cases} y = -x + 4 \\ \frac{x^2}{a^2} + y^2 = 1 \end{cases}$, 整理得, $(a^2 + 1)y^2 - 8y + 16 - a^2 = 0$, 设交点坐标为 $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$, 要使直线 $y = -x + 4$ 与椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + y^2 = 1 (a > 1)$ 在第一象限内有两个公共点, 易知两点横坐标均大于零, 则 $\begin{cases} \Delta = (-8)^2 - 4(a^2 + 1)(16 - a^2) > 0, \\ y_1 y_2 = \frac{16 - a^2}{a^2 + 1} > 0, \end{cases}$ 解得 $\sqrt{15} < a < 4$, 则 $2\sqrt{15} < 2a < 8$, 故 C 的长轴长的取值范围为 $(2\sqrt{15}, 8)$. 故答案为: $(2\sqrt{15}, 8)$.

14. 【答案】 $\left(-\infty, \frac{33}{40}\right)$

【解析】设 $f(n) = a_n + b_n = \frac{1}{10}n + 2^{4-n}$, $n \in \mathbf{N}_+$, 则 $f(n+1) - f(n) = \left[\frac{1}{10}(n+1) + 2^{3-n} \right] - \left(\frac{1}{10}n + 2^{4-n} \right) = \frac{1}{10} - 2^{3-n}$. 易得函数 $y = \frac{1}{10} - 2^{3-n}$ 为增函数. 由 $f(7) - f(6) = \frac{1}{10} - \frac{1}{8} < 0$, $f(8) - f(7) = \frac{1}{10} - \frac{1}{16} > 0$, 得 $f(7) < f(6)$, $f(8) > f(7)$, 所以 $f(n)_{\min} = f(7) = \frac{33}{40}$, 故 λ 的取值范围为 $\left(-\infty, \frac{33}{40}\right)$. 故答案为: $\left(-\infty, \frac{33}{40}\right)$.

15. 解:(1)点(3, 1),(6, 4)中点坐标为 $(\frac{9}{2}, \frac{5}{2})$,两点连线斜率为 $\frac{4-1}{6-3} = 1$.……………2分

则两点连线中垂线斜率为-1,故这两点中垂线方程为: $y - \frac{5}{2} = -\left(x - \frac{9}{2}\right)$, 即 $y + x = 7$.……………3分

将中垂线方程与 $2x - y - 2 = 0$ 联立, $\begin{cases} x + y = 7, \\ 2x - y = 2, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} x = 3, \\ y = 4, \end{cases}$ ……………4分

即圆心坐标为(3, 4),则半径 $r = \sqrt{(3-3)^2 + (1-4)^2} = 3$,……………5分

故圆的标准方程为 $(x-3)^2 + (y-4)^2 = 9$.……………6分

(2)设直线 l 到圆心距离为 d ,则 $2\sqrt{r^2 - d^2} = |AB|$.

即 $2\sqrt{9 - d^2} = 2\sqrt{5}$,解得 $d = 2$.……………7分

当直线 l 斜率不存在时,方程为 $x = 1$,到圆心(3, 4)距离为2,满足题意;……………8分

当直线 l 斜率存在时,设 $y = k(x-1) + 1$,由其到圆心距离为2,结合点到直线距离公式,可得 $\frac{|2k-3|}{\sqrt{k^2+1}} = 2$,即

$4k^2 + 9 - 12k = 4k^2 + 4$,解得 $k = \frac{5}{12}$.……………10分

故直线方程为 $y = \frac{5}{12}(x-1) + 1$ 即 $5x - 12y + 7 = 0$.

故直线方程为 $x = 1$ 或 $5x - 12y + 7 = 0$.……………13分

16. (1)(i)证明:取 CD 的中点 O ,连接 PO ,

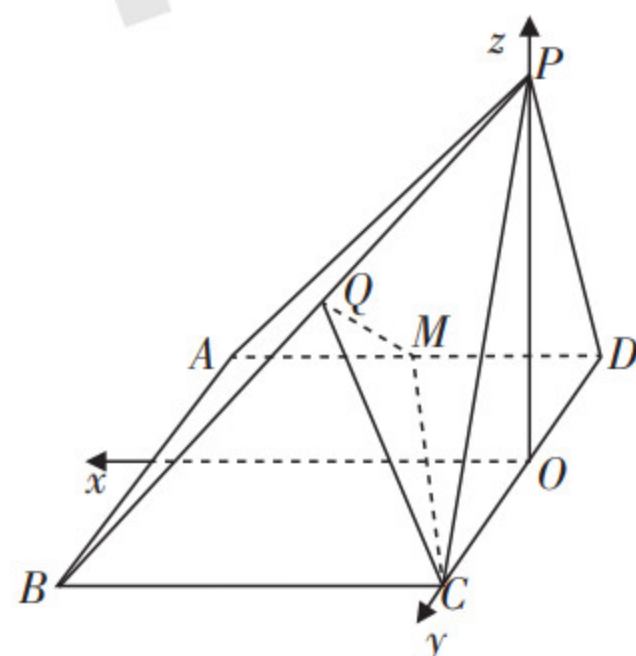
因为 $PC = PD = \sqrt{5}$,所以 $PO \perp CD$,

因为 $CD = 2$,所以 $PO = 2$,

因为平面 $PCD \perp$ 平面 $ABCD$,平面 $PCD \cap$ 平面 $ABCD = CD$, $PO \subset$ 平面 PCD ,

所以 $PO \perp$ 平面 $ABCD$,……………3分

以 O 为原点,以平行于 BC 的直线为 x 轴,以 OC, OP 所在直线分别为 y, z 轴,建立如图所示空间直角坐标系
 $O - xyz$,



则 $M(1, -1, 0), P(0, 0, 2), B(2, 1, 0), C(0, 1, 0), D(0, -1, 0)$,

因为 $\overrightarrow{PB} = 2\overrightarrow{PQ}$,所以 Q 为 PB 的中点,所以 $Q(1, \frac{1}{2}, 1)$,所以 $\overrightarrow{MQ} = (0, \frac{3}{2}, 1)$,……………5分

易知平面 PCD 的一个法向量为 $\mathbf{m} = (1, 0, 0)$,

则 $\overrightarrow{MQ} \cdot \mathbf{m} = 0$,即 $\overrightarrow{MQ} \perp \mathbf{m}$,

因为 $MQ \not\subset$ 平面 PCD ,所以 $MQ \parallel$ 平面 PCD ;……………6分

(ii)解: $\overrightarrow{CM} = (1, -2, 0), \overrightarrow{CD} = (0, -2, 0)$,……………7分

设平面 CMQ 的法向量为 $\mathbf{n} = (x_1, y_1, z_1)$,

由 $\begin{cases} \overrightarrow{CM} \cdot \mathbf{n} = 0, \\ \overrightarrow{MQ} \cdot \mathbf{n} = 0, \end{cases}$ 得 $\begin{cases} x_1 - 2y_1 = 0, \\ \frac{3}{2}y_1 + z_1 = 0, \end{cases}$ 取 $y_1 = 2$,则 $\mathbf{n} = (4, 2, -3)$.……………8分

$$\text{则} \left| \cos \langle \vec{n}, \vec{CD} \rangle \right| = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{CD}|}{|\vec{n}| \cdot |\vec{CD}|} = \frac{4}{\sqrt{29} \times 2} = \frac{2\sqrt{29}}{29},$$

故直线 CD 与平面 CMQ 所成角的正弦值为 $\frac{2\sqrt{29}}{29}$10分

$$(2) \text{解: } \vec{CB} = (2, 0, 0), \vec{CM} = (1, -2, 0), \vec{BP} = (-2, -1, 2),$$

$$\text{设 } \vec{BQ} = \lambda \vec{BP} (0 < \lambda < 1), \text{ 则 } \vec{BQ} = (-2\lambda, -\lambda, 2\lambda),$$

$$\text{所以 } \vec{CQ} = \vec{CB} + \vec{BQ} = (2 - 2\lambda, -\lambda, 2\lambda),$$

$$\text{设平面 } CMQ \text{ 的一个法向量为 } \vec{p} = (x_2, y_2, z_2), \text{ 则 } \begin{cases} \vec{CM} \cdot \vec{p} = x_2 - 2y_2 = 0, \\ \vec{CQ} \cdot \vec{p} = (2 - 2\lambda)x_2 - \lambda y_2 + 2\lambda z_2 = 0, \end{cases}$$

$$\text{取 } y_2 = \lambda, \text{ 则 } \vec{p} = \left(2\lambda, \lambda, \frac{5}{2}\lambda - 2 \right), \dots\dots\dots 12 \text{分}$$

$$\text{又知平面 } PCD \text{ 的一个法向量为 } \vec{m} = (1, 0, 0),$$

$$\text{所以 } \left| \cos \langle \vec{p}, \vec{m} \rangle \right| = \frac{|\vec{p} \cdot \vec{m}|}{|\vec{p}| \cdot |\vec{m}|} = \frac{2\lambda}{\sqrt{\frac{45}{4}\lambda^2 - 10\lambda + 4}} = \frac{4\sqrt{21}}{21},$$

$$\text{整理得 } 3\lambda^2 - 5\lambda + 2 = 0, \text{ 解得 } \lambda = \frac{2}{3} \text{ 或 } \lambda = 1 (\text{舍去}), \dots\dots\dots 13 \text{分}$$

$$\text{所以 } \vec{BQ} = \left(-\frac{4}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{4}{3} \right), \text{ 则 } Q \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{4}{3} \right), \text{ 所以 } \vec{MQ} = \left(-\frac{1}{3}, \frac{4}{3}, \frac{4}{3} \right), \dots\dots\dots 14 \text{分}$$

$$\text{故 } MQ \text{ 的长度为 } |\vec{MQ}| = \sqrt{\left(-\frac{1}{3} \right)^2 + \left(\frac{4}{3} \right)^2 + \left(\frac{4}{3} \right)^2} = \frac{\sqrt{33}}{3}. \dots\dots\dots 15 \text{分}$$

$$17. (1) \text{解: 当 } n = 1 \text{ 时, } 2a_1 = 1, \text{ 得 } a_1 = \frac{1}{2}. \dots\dots\dots 2 \text{分}$$

$$\text{当 } n \geq 2 \text{ 时, } 2a_1 + \frac{3}{2}a_2 + \dots + \frac{n+1}{n}a_n = n,$$

$$2a_1 + \frac{3}{2}a_2 + \dots + \frac{n}{n-1}a_{n-1} = n-1,$$

$$\text{两式相减得 } \frac{n+1}{n}a_n = 1, \text{ 则 } a_n = \frac{n}{n+1}. \dots\dots\dots 5 \text{分}$$

$$\text{当 } n = 1 \text{ 时, } a_1 = \frac{1}{2} = \frac{1}{1+1} \text{ 符合上式,}$$

$$\text{所以 } a_n = \frac{n}{n+1}. \dots\dots\dots 7 \text{分}$$

$$(2) \text{证明: 由 (1) 得 } \frac{a_n}{n^2} = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1},$$

$$\text{所以 } S_n = \left(1 - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) + \dots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \right) + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1},$$

$$\text{故 } S_n = a_n. \dots\dots\dots 11 \text{分}$$

$$(3) \text{解: 由 (1) 得 } c_n = 2^{n+1}(n+1)a_n = n \times 2^{n+1},$$

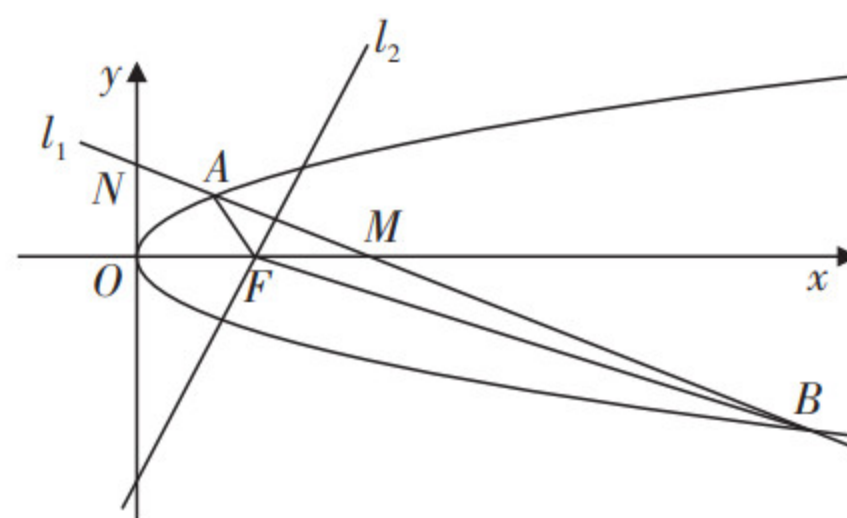
$$\text{则 } T_n = 1 \times 2^2 + 2 \times 2^3 + \dots + (n-1) \times 2^n + n \times 2^{n+1},$$

$$2T_n = 1 \times 2^3 + 2 \times 2^4 + \dots + (n-1) \times 2^{n+1} + n \times 2^{n+2}, \dots\dots\dots 13 \text{分}$$

$$\text{所以 } T_n - 2T_n = -T_n = 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{n+1} - n \times 2^{n+2} = \frac{2^2 \times (2^n - 1)}{2 - 1} - n \times 2^{n+2} = (1 - n) \times 2^{n+2} - 4,$$

$$\text{所以 } T_n = (n-1) \times 2^{n+2} + 4. \dots\dots\dots 15 \text{分}$$

18. 解:(1)因为 $f(x) = 2e^x - ax^2$,所以 $f'(x) = 2e^x - 2ax$2分
- 因为 $f(1) = 2e - a$, $f'(1) = 2e - 2a$,所以 $\begin{cases} 2e - a = -a - b, \\ 2e - 2a = -b, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} a = 0, \\ b = -2e, \end{cases}$ 4分
- (2)因为 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上有两个零点,
- 所以 $\frac{2e^x}{x^2} - a = 0$ 有两个不同的根,等价于直线 $y = a$ 与曲线 $y = \frac{2e^x}{x^2}$ 有两个交点.5分
- 令 $g(x) = \frac{2e^x}{x^2}$,则 $a > g(x)_{\min}$,所以 $g'(x) = \frac{2e^3(x-2)}{x^3}$,由 $g'(x) > 0$,得 $x > 2$,
- 由 $g'(x) < 0$,得 $0 < x < 2$,
- 所以 $g(x)$ 在 $(0, 2)$ 上单调递减,在 $[2, +\infty)$ 上单调递增.7分
- 因为 $g(x)_{\min} = g(2) = \frac{e^2}{2}$,
- 所以 a 的取值范围是 $\left(\frac{e^2}{2}, +\infty\right)$9分
- (3)因为 $a = 2$,所以 $f(x) = 2e^x - 2x^2$, $f'(x) = 2e^x - 4x$10分
- 设切点为 $(x_0, 2e^{x_0} - 2x_0^2)$,则切线方程为 $y - (2e^{x_0} - 2x_0^2) = (2e^{x_0} - 4x_0)(x - x_0)$,
- 将点 $(0, 2)$ 代入,整理得 $(x_0 - 1)(x_0 + 1 - e^{x_0}) = 0$11分
- 令 $h(x) = x + 1 - e^x$,则 $h'(x) = 1 - e^x$,在 $x \in (-\infty, 0)$ 时, $h'(x) > 0$, $x \in (0, +\infty)$ 时, $h'(x) < 0$,
- 所以 $h(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递增,在 $(0, +\infty)$ 上单调递减,所以 $h(x)_{\max} = h(0) = 0$12分
- 因为方程 $x + 1 - e^x = 0$ 有唯一的根0,所以方程 $(x_0 - 1)(x_0 + 1 - e^{x_0}) = 0$ 的根为 $x_0 = 1$ 或 $x_0 = 0$,13分
- 当 $x_0 = 1$ 时,切线方程为 $(2e - 4)x - y + 2 = 0$;14分
- 当 $x_0 = 0$ 时,切线方程为 $2x - y + 2 = 0$16分
- 综上切线方程为: $(2e - 4)x - y + 2 = 0$ 或 $2x - y + 2 = 0$17分
19. (1)解:抛物线 $C: y^2 = 2px (p > 0)$ 的焦点为 $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$,
- 由题意可知, $2 \times \frac{p}{2} - 0 - 4 = 0$,解得 $p = 4$,2分
- 故抛物线 C 的方程为 $y^2 = 8x$3分
- (2)证明:易知动直线 l_2 的斜率不为0,
- 设 l_2 的方程为 $x = ty + 4$, $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$,
- 则 $\begin{cases} x = ty + 4 \\ y^2 = 8x \end{cases}$,整理得 $y^2 - 8ty - 32 = 0$,4分
- 则 $\Delta = 64t^2 + 128 > 0$, $y_1 + y_2 = 8t$, $y_1 y_2 = -32$,5分
- 所以 $\triangle ABF$ 的面积为 $S_{\triangle ABF} = \frac{1}{2} \times (4 - 2) \cdot |y_1 - y_2| = \sqrt{(y_1 + y_2)^2 - 4y_1 y_2} = \sqrt{64t^2 + 128} = 8\sqrt{t^2 + 2}$,6分
- 由题意得, $8\sqrt{t^2 + 2} = 8\sqrt{3}$,解得 $t = \pm 1$,7分
- 所以直线 l_2 的方程为 $x \pm y - 4 = 0$,则 $N(0, \pm 4)$,故 $|OM| = |ON|$9分
- (3)解:不妨设点 A 在第一象限内,则点 B 在第四象限内,
- 因为 l_1 上任意一点到两直线 AF, BF 的距离相等,所以直线 l_1 平分 $\angle AFB$,10分
- 结合图形可知, AF, BF 的斜率都存在,则 $k_{AF} = \frac{y_1}{x_1 - 2} = \frac{y_1}{ty_1 + 2}$, $k_{BF} = \frac{y_2}{x_2 - 2} = \frac{y_2}{ty_2 + 2}$,11分



又直线 l_1 的斜率为 2, 在 l_1 上取一点 E , 且 E 位于点 F 的右上方,

所以 $\tan \angle AFE = \tan \angle BFE$, 则 $\frac{\frac{y_1}{ty_1 + 2} - 2}{1 + \frac{2y_1}{ty_1 + 2}} = \frac{2 - \frac{y_2}{ty_2 + 2}}{1 + \frac{2y_2}{ty_2 + 2}}$,13分

整理得, $(t + 2)(2 - 4t)y_1y_2 - (8t + 6)(y_1 + y_2) - 16 = 0$,14分

由(2)得, $y_1 + y_2 = 8t, y_1y_2 = -32$,

所以 $-(t + 2)(2 - 4t) \times 32 - (8t + 6) \times 8t - 16 = 0$,

即 $-2(t + 2)(2 - 4t) - (4t + 3)t - 1 = 0$, 所以 $4t^2 + 9t - 9 = 0$,15分

解得 $t = \frac{3}{4}$ 或 $t = -3$, 经验证可知, $t = -3$,16分

故直线 l_2 的斜率为 $-\frac{1}{3}$17分